۴ . ۵ قاعدهٔ هوپیتال

در قضیهٔ ۶، از فصل دوم ، بیان نمودیم که اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=l_2\neq 0$ آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$. وضعیت‌های مختلفی وجود دارد که این قضیه را در مورد آن‌ها نمی‌توان بکار برد. به ویژه، اگر $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim_{x\to a} f(x)=k$ ، که در آن k عددی ثابت و مخالف با صفر است آنگاه قضیه فوق را نمی‌توان بکار برد. در این بخش حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن هردوی $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$. حدهایی از این نوع قبلاً مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ و $\lim_{x\to 0} x=0$ اما در فصل دوم مثال ۱۳، ثابت کردیم که $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. همچنین $\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)=0,\lim_{x\to 4}(x^2-x-12)=0$ ولی

$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{x+1}=\frac{7}{5}$ (توجه کنید که $x-4\neq 0$ و لذا صورت و مخرج کسر را می‌توان بر آن تقسیم کرد).

.

در این بخش می‌خواهیم این مطلب را به طور کلی بررسی نماییم.

تعریف : اگر f و g توابعی باشند که برای آن‌ها $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$، در این صورت گفته می‌شود که تابع $\frac{f}{g}$ در a دارای **صورت مَبهم (نامعین)** $\frac{0}{0}$ است.

در قضیهٔ زیر که به **قاعدهٔ هوپیتال** معروف است حالت کلی حد تابعی در یک نقطه را در (صورت وجود حد) بررسی می‌نماییم وقتی که دارای صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است.

قضیهٔ ۱۹ (قاعدهٔ هوپیتال) : فرض کنیم توابع f و g روی بازهٔ باز I شامل نقطهٔ a ، به استثنای احتمالاً نقطهٔ a، مشتق‌پذیر باشند. فرض کنیم که به ازای هر $x\neq a$، $g'(x)\neq 0$.

فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$. در این صورت اگر $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$، آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

قضیه برقرار است هرگاه کلیهٔ حدود به حدود راست یا حدود چپ تبدیل گردند.

اثبات. سه حالت متمایز را در نظر می‌گیریم: (i) $x \to a^+$، (ii) $x \to a^-$، (iii) $x \to a$. (i) چون در فرض قضیه مشخص نشده است که f , g در a تعریف شده‌اند، توابع جدید G, F را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(۱)\quad \begin{cases} F(a)=0 & , \quad F(x)=f(x) \quad \text{هرگاه} \quad x \neq a \\ G(a)=0 & , \quad G(x)=g(x) \quad \text{هرگاه} \quad x \neq a \end{cases}$$

فرض کنیم b نقطهٔ انتهایی راست بازهٔ باز I در فرض قضیه باشد. چون f و g هر دو بر I، به استثنای احتمالاً a ، مشتق‌پذیر هستند، نتیجه می‌گیریم که Fو G هر دو بر بازهٔ $(a,x]$ که در آن $a<x<b$، مشتق‌پذیرند. بنـابراین Fو G هردو بر $(a,x]$ پیوسته هستند. همچنین توابع Fو G هردو در نقطهٔ a از راست پیوسته هستند زیرا

$$\lim_{x\to a^+} G(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0=G(a), \lim_{x\to a^+} F(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=0=F(a)$$

لذا Fو G بربازهٔ بستهٔ $[a,x]$ پیوسته هستند. پس Fو G در هر سه شرط قضیهٔ کوشی (قضیهٔ ۱۱) بر بازهٔ $[a,x]$صدق می‌کنند. بنابراین

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(z)}{G'(z)} \qquad (2)$$

که در آن z عددی است باشرط $a<z<x$. از (1) و (2) داریم

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (3)$$

چون $a<z<x$ ، نتیجه می‌گیریم که اگر $x \to a^+$، آنگاه $z \to a^+$، بنابراین

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to a^+}\frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (4)$$

اما بنا بر فرض، حد طرف راست تساوی (4) مساوی با l است. بنابراین $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

(ii) مانند حالت (i) است و به عنوان تمرین آن را ثابت کنید.

(iii) اثبات این حالت با استفاده از (i)و (ii) امکان‌پذیر است.

تبصره : اگر $f'(a)=g'(a)=0$ و مشتق‌های $f'(x)$ و $g'(x)$ در شرایط قضیهٔ ۱۹ که برای $f(x)$ و $g(x)$ گفته شده صدق کنند، آنگاه با بکار بردن قاعدهٔ هوپیتال برای کسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ به رابطهٔ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ می‌رسیم. خلاصه آنکه، در صورت برقراری شرایط، قاعدهٔ هوپیتال را تا هر کجا که لازم باشد می‌توان بکار برد.

مثال ۲۸ : حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال محاسبه کنید :

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} \qquad\qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x} \qquad\qquad (iv)\quad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$$

$$(v)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x} \qquad\qquad (vi)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1+\ln x}{e^{x}-e}.$$

حل.

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2\,.$$

در اینجا، مجبور شدیم سه بار از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم، مشتق های اول و دوم در $x=0$ صورت مبهم $\frac{0}{0}$ را بدست می‌دهند.

$$(iv)\quad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^{2}}}}{1}=\frac{4}{9}$$

$$(v)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}}{\alpha\cos\alpha x-\beta\cos\beta x}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$$

$$(vi)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1+\ln x}{e^{x}-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^{x}}=\frac{3}{e}$$

نکته : قاعدهٔ هوپیتال به ما کمک می‌کند که، در صورت برقراری شرایط، مقدار واقعی $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ را با استفاده از $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ پیدا کنیم. این عمل، یعنی یافتن مقدار واقعی صورت مبهم را **رفع ابهام** می‌نامند.

قاعده هوپیتال در حالتی که یا x به‌طور نامحدود افزایش یابد، یعنی $x\to+\infty$ یا x به طور نامحدود کاهش یابد، یعنی $x\to-\infty$ نیز برقرار است. در قضیهٔ بعد این مطلب را نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۲۰ (قاعدهٔ هوپیتال) :

فرض کنیم توابع f و g به ازای هر $x>N$ مشتق‌پذیر باشند که در آن N عدد ثابت مثبتی است و فرض کنیم که به ازای هر $x>N$، $g'(x)\neq 0$. فرض کنیم $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. در این صورت اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$، آنگاه $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

قضیه برقرار خواهد بود هرگاه «$x\to+\infty$» با عبارت «$x\to-\infty$» جایگذاری شود.

اثبات. قضیه را در حالتی که $x\to+\infty$ ثابت می‌کنیم. اثبات در حالت $x\to-\infty$ به روشی مشابه است.

به ازای هر $x>N$، فرض می‌کنیم $x=\frac{1}{t}$، در این صورت $t=\frac{1}{x}$. فرض کنیم F و G توابعی باشند که برای $t\neq 0$ با $F(t)=f(\frac{1}{t})$ و $G(t)=g(\frac{1}{t})$ تعریف شده‌اند. در این صورت $f(x)=F(t)$ و $g(x)=G(t)$، که در آن $x>N$ و $0<t<\frac{1}{N}$. مطابق آنچه که در مورد حدود توابع می‌دانیم بسادگی می‌توان نشان داد که عبارت‌های

$$\lim_{t\to 0^+} F(t)=M \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=M$$

به یک معنی هستند. چون بنابرفرض، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\lim_{t\to 0^+} F(t)=0$ و $\lim_{t\to 0^+} G(t)=0$.

با بررسی کسر $\frac{F'(t)}{G'(t)}$ و استفاده از قاعدهٔ زنجیری ، داریم

$$\frac{F'(t)}{G'(t)}=\frac{-\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2}g'(\frac{1}{t})}=\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (1)$$

چون بنابر فرض $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$ ، از آنچه در بالا گفته شد نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}=1\,. \qquad (2)$$

چون به ازای هر $x>N$، $g'(x)\neq 0$، پس به ازای هر $0<t<\frac{1}{N}$،

$$G'(t)\neq 0\ . \qquad (3)$$

از (1) ، (2) ، (3) و قضیهٔ ۱۹ نتیجه می‌شود که $\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}=1$.

امّا به دلیل آن‌که به ازای هر $x>N$ و $t\neq 0$، $\frac{F(t)}{G(t)}=\frac{f(x)}{g(x)}$ مشاهده می‌کنیم که $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ و بدین ترتیب قضیه ثابت شده است.

تبصره : قضایای ۱۹ و ۲۰ در حالتی که 1 با $+\infty$ یا $-\infty$ جایگذاری شود نیز برقرار هستند. ما به جهت رعایت اختصار از اثبات آن‌ها خودداری می‌نماییم.

مثال ۲۹ : حدود زیر را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال محاسبه نمایید :

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{arc\,tg(\frac{1}{x})} \qquad\qquad (ii)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x+1}{x})}{\ln(\frac{x-1}{x})}\ .$$

حل. (i) داریم $\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{1}{x})=0$ و $\lim_{x\to+\infty}arc\,tg(\frac{1}{x})=0$. لذا بنابر قاعدهٔ هوپیتال بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{arc\,tg(\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{x^2})\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

چون $\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$ نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2+1}}=1$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{arc\,tg(\frac{1}{x})}=1\,.$$

(ii) چون $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\frac{x-1}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\frac{x+1}{x})=0$ بنابراین با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{x+1}{x})}{\ln(\frac{x-1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(\frac{x+1}{x}))'}{(\ln(\frac{x-1}{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x+1)-\ln x)'}{(\ln(x-1)-\ln x)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-x-1}{x(x+1)}}{\frac{x-x+1}{x(x-1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(x-1)}{x+1}=-1.$$

تعریف : گوییم کسر $\frac{f}{g}$ دارای **صورت مبهم** $\frac{\infty}{\infty}$ است در صورتی که $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\pm\infty$.

قاعدهٔ هوپیتال برای صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ نیز بکار می‌رود. به قضایای زیر توجه نمایید.

قضیهٔ ۲۱ (قاعدهٔ هوپیتال) : فرض کنیم توابع f و g بر بازهٔ باز I شامل نقطهٔ a، به استثنای احتمالاً a، مشتق‌پذیر بوده و فرض کنیم به ازای هر $x\neq a$ در I، $g'(x)\neq 0$. فرض کنیم

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$$

در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

قضیهٔ ۲۲ (قاعدهٔ هوپیتال) : فرض کنیم توابع f و g به ازای هر $x>N$ مشتق‌پذیر باشند، که در آن N عدد مثبت ثابتی است و فرض کنیم که به ازای هر $x>N$، $g'(x)\neq 0$. فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\pm\infty$، در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$، آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

قضیه برقرار خواهد بود هرگاه « $x\to+\infty$ » با عبارت « $x\to-\infty$ » جایگذاری شود.

تبصره : قضایای ۲۱ و ۲۲ برقرار هستند هرگاه بجای l قرار دهیم $+\infty$ یا $-\infty$ و به طریقی مشابه ثابت می‌شوند.

مثال ۳۰ : حدود زیر را با استفاده از دستور هوپیتال محاسبه نمایید :

$(i)\ \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$ $\qquad (ii)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2+e^x)}{3x}$

$(iii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}$ $\qquad (iv)\ \lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$ که در آن n عددی صحیح و مثبت است.

$(v)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg\, x}{tg\, 3x}$ $\qquad (vi)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\cot g\, x}$.

حل. (i) چون $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ ، قاعدهٔ هوپیتال را بکار برده و بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\ .$$

(ii) چون $\lim_{x\to +\infty}(2+e^x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}3x=+\infty$ ، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(2+e^x)}{3x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{2+e^x}.e^x}{3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6+3e^x}\ .$$

اکنون به دلیل آن که $\lim_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}(6+3e^x)=+\infty$ ، مجدداً قاعدهٔ هوپیتال را بکار برده و بدست می‌آوریم $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{6+3e^x}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{3e^x}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.بنابراین $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(2+e^x)}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

(iii) چون $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sec^2 x=+\infty$ و $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sec^2 3x=+\infty$ ، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{2\sec^2 x\, tg\, x}{6\sec^2 3x\, tg\, 3x}\ .$$

امّا $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sec^2 x\, tg\, x=+\infty$ و $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}6\sec^2 x\, tg\, 3x=+\infty$. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که کاربرد دوبارهٔ قاعدهٔ هوپیتال مفید فایده نخواهد بود. با وجود این، کسر اوّلیه را می‌توانیم بازنویسی کرده و بدست آوریم $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}$.

اکنون، به دلیل آن که $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\cos^2 3x=0$ و $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\cos^2 x=0$ ، می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-6\cos 3x\ \sin 3x}{-2\cos x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3(2\cos 3x\sin 3x)}{(2\cos x\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3\sin 6x}{\sin 2x}$$

چون $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}3\sin 6x=0$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin 2x=0$ ، با کاربرد مجدد قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{3\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{18\cos 6x}{2\cos 2x}=\frac{18(-1)}{2(-1)}=9.$$

بنابراین $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}=9$.

(iv) چون $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}$. اکنون اگر $n=1$ آنگاه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

اما اگر $n>1$ ، آنگاه $\lim_{x\to+\infty}nx^{n-1}=+\infty$ و مجدداً قاعدهٔ هوپیتال را بکار می‌بریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}.$$

اگر $n=2$ آنگاه حد بالا و لذا حد اوّلیه برابر با صفر خواهد شد. اگر $n>2$ روش فوق را ادامه داده و در حالت کلّی بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\dots$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\dots 2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\dots 2.1}{e^x}=0\cdot$$

(v) چون $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}tg\,x=\infty$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}tg\,3x=\infty$ می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\,x}{tg\,3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(tg\,x)'}{(tg3x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{2\times 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}=(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x})(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x})$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{(1)}=3(\frac{-1}{1})\cdot\frac{(-1)}{(1)}=3\cdot$$

(vi)با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم،

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\cot g\, x}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{(\cot g x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$

آخرین حد بالا صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است، با وجود این ما نیاز به کاربرد مجدد قاعدهٔ هوپیتال نداریم، زیرا

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\times0=0$$

و در نتیجه بدست می‌آوریم $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cot g\, x}=0$.

تبصــــره مهـــم : توجـه کنیـد کـه مـا از قاعـدهٔ هوپیتـال $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ تنها در صورتی می‌توانیم استفاده کنیم که حد طرف راست (متنـاهی یـا نامتناهی) وجود داشته باشد. در غیر این‌صورت ممکن است حد طرف چپ موجود باشد بدون آن که حد طرف راست وجود داشته باشد. برای توضیح، فرض کنیم هدف ما یـافتن $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ باشـد. این حد وجود داشته و مساوی با 1 است. در حقیقت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1.$$

اما مشتق صـورت و مخـرج کسـر عبـارت اسـت از $\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$ و وقتـی $x\to\infty$ عبارت $1+\cos x$ دائماً بین 0و 2 در نوسان است.

صورت‌های مبهم دیگر

اکنون به معرفی صورت‌های مبهم دیگری می‌پردازیم و در صورتی که بخواهیم برای رفع ابهام آن‌ها از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم بایستی به طریقی آن‌ها را به یکی از صـورت‌هـای مـبهم $\frac{0}{0}$ یـا $\frac{\infty}{\infty}$ در آوریم.

(۱) صورت مبهم $0\cdot\infty$ **:** فرض کنیم $\lim_{x\to a}f(x)=0$ و $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$، هـدف مـا یـافتن $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$، یعنی، صورت مبهم $0\cdot\infty$ است.

اگر عبارت بالا را به صورت زیر بنویسیم :

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

یا به شکل
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

آنگاه وقتی $x\to a$ ما صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را بدست می‌آوریم.

عین عبارات بالا را می‌توان بیان نمود هرگاه بجای « $x\to a$ » عبارت « $x\to\infty$ » جایگذاری شود.

مثال ۳۱ : حدود زیر را در صورت وجود، پیدا کنید :

(i) $\lim_{x\to 0^+} arc\sin x\cdot cscx$ $\qquad$ (ii) $\lim_{x\to 0^+} x^n\ln x$ $(n>0)$

(iii) $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\sqrt{x}$ $\qquad$ (iv) $\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin^2 x)\times\cot g\ln^2(1+x)\right]$

(v) $\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)\cot g\,x$.

حل. (i) چون $\lim_{x\to 0^+} arc\sin x=0$ و $\lim_{x\to 0^+} cscx=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x}=+\infty$ تابع تعریف شده با $arc\sin x\cdot cscx$ وقتی $x\to 0^+$ دارای صورت مبهم $0\cdot\infty$ است. اکنون داریم

$$\lim_{x\to 0^+} arc\sin x\cdot cscx=\lim_{x\to 0^+}\frac{arc\sin x}{\sin x}\qquad (\text{صورت مبهم } \frac{0}{0})$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}=\frac{1}{1}=1\cdot$$

(ii) چون $\lim_{x\to 0^+}x^n=0$ و $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ پس صورت مبهم $0\cdot\infty$ را داریم. لذا با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال

$$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^n}{n}=0\cdot$$

(iii) داریم $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}=\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}e^{-x}=0$ و لذا صورت مبهم $0\cdot\infty$ بدست می‌آید. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\qquad (\text{صورت مبهم } \frac{\infty}{\infty})$$

اکنون با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x}=0\,.$$

اگرحد را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می آوردیم کاربه نتیجه نمی رسید. زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^{\frac{-1}{2}}}\qquad (\text{صورت مبهم } \frac{0}{0})$$

و با استفاده از قاعدهٔهوپیتال :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^{\frac{-1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x}}{\frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}}$$

که مجددا صورت مبهم $\frac{0}{0}$ را بدست می دهد.

(iv) چون $\lim_{x\to 0}\ln(1+\sin^2 x)=0$ و $\lim_{x\to 0}\cot g\ln^2(1+x)=\infty$ صورت مبهم $0.\infty$ را داریم. لذا با استفاده از قاعدهٔهوپیتال

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin^2 x)\cot g\ln^2(1+x)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{tg\ln^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\sin^2 x}\sin 2x}{2\left\{1+tg^2\left[\ln^2(1+x)\right]\right\}\ln(1+x).\frac{1}{1+x}}$$

و پس از ساده نمودن و تفکیک به دو حد،

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}}=1\cdot$$

(v) چون $\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)=0$ و $\lim_{x\to 0}\cot g\,x=\infty$ حالت مبهم $0\cdot\infty$ را داریم.

لذا، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)\cot g\,x=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{tg\,x}\qquad (\text{صورت مبهم } \frac{0}{0})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{1+tg^2 x}=\frac{1-1}{1+0}=0\cdot$$

(۲) صورت مبهم $\infty-\infty$: فرض کنیم $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$، هر دو حد $+\infty$ یا هر دو حد $-\infty$ شوند. در این صورت گفته می‌شود که وقتی $x\to a$ تابع $f(x)-g(x)$ دارای **صورت مبهم** $\infty-\infty$ است. در این حالت هم ابتدا حد را به یکی از صورت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ یا

$\frac{\infty}{\infty}$ درآورده و سپس از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌نماییم. مطلب بالا برقرار است هرگاه به جای «$x \to a$» عبارت «$x \to \infty$» جایگذاری گردد.

مثال ۳۲ : حدود زیر را پیدا کنید :

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right) \qquad (ii)\quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to +\infty}(x-\ln^3 x) \qquad (iv)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot g^2 x\right).$$

حل. (i) چون $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\sec x}=+\infty$ صورت مبهم $\infty-\infty$ را داریم. با دوبارهٔ نویسی عبارت بدست می آوریم

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x^2\sec x}.$$

اما $\lim_{x\to 0}(\sec x-1)=0$ و $\lim_{x\to 0}(x^2\sec x)=0$، لذا با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x^2\sec x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x\, tg\, x}{2x\sec x+x^2\sec x\, tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{2x+x^2 tg\, x}.$$

ولی $\lim_{x\to 0} tg\, x=0$ و $\lim_{x\to 0}(2x+x^2 tg\, x)=0$ و لذا مجدداً قاعدهٔ هوپیتال را بکار برده و بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{2x+x^2 tg\, x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{2+2xtg\, x+x^2\sec^2 x}=\frac{1}{2}.$$

بنابراین $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sec x}\right)=\frac{1}{2}$.

(ii)چون $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x}=+\infty$ و $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ پس صورت مبهم $\infty-\infty$ را داریم.

می‌توانیم بنویسیم $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right]$ که صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است و بنابراین می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1+x\ln x}.$$

چون کسر اخیر هم به صو رت مبهم $\frac{0}{0}$ است، مجددا قاعده هوپیتال را بکار برده و بدست می آوریم

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{1+x(\frac{1}{x})+\ln x}\right]=\frac{1}{2}\cdot$$

(iii) چون $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln^3 x=+\infty$ صورت مبهم $\infty-\infty$ را داریم. می‌نویسیم

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right)\cdot$$

چون $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}$ دارای صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}3\frac{\ln^2 x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}3\times\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}6\frac{\ln x}{x}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

بنابراین داریم $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=+\infty$.

(iv) چون $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0}\cot g^2 x=+\infty$ حالت مبهم $\infty-\infty$ را داریم. می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot g^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\quad (\tfrac{0}{0}\ \text{صورت مبهم})$$

لذا با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2 x+2x^2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x\cos^2 x+x^2\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\sin 2x-2x\cos^2 x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin 2x+2(1+x^2)\cos 2x-2\cos^2 x+2x\sin 2x}{2\sin^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\sin 2x+2(1+x^2)\cos 2x-2\cos^2 x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\qquad (\tfrac{0}{0}\ \text{صورت مبهم})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-4x^2)\sin 2x+12x\cos 2x}{(6+4x^2)\sin 2x+12x\cos 2x}\qquad (\tfrac{0}{0}\ \text{صورت مبهم})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-8x\sin 2x+2(2-4x^2)\cos 2x+12\cos 2x-24x\sin 2x}{-8x\sin 2x+2(6-4x^2)\cos 2x+12\cos 2x-24x\sin 2x}$$

$$=\frac{0+4+12-0}{0+12+12-0}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}\cdot$$

بنابراین $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot g^2 x\right)=\frac{2}{3}$.

(۳) صورت مبهم 1^∞ : فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ و هدف یافتن $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ باشد، که به آن **صورت مبهم** 1^∞ می‌گویند. قرار می‌دهیم $y=(f(x))^{g(x)}$ و از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم :

$$\ln y=\ln(f(x))^{g(x)}=g(x)\ln(f(x))\cdot$$

وقتی $x\to a$ ، در طرف راست صورت مبهم $0\cdot\infty$ را بدست می‌آوریم. پس از محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\ln y$، بدست آوردن $\lim_{x\to a} y$ آسان است. در حقیقت، با توجه به پیوستگی تابع لگاریتم، داریم

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln(\lim_{x\to a} y)$$

و اگر $\ln(\lim_{x\to a} y)=b$ آنگاه بدیهی است که $\lim_{x\to a} y=e^b$. اگر، به ویژه، $b=+\infty$ یا $b=-\infty$، آنگاه به ترتیب خواهیم داشت، 0 یا $\lim_{x\to a} y=+\infty$.

(۴) صورت مبهم 0^0 : فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و هدف یافتن $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ باشد، که به آن **صورت مبهم** 0^0 می‌گویند.

روش محاسبه مشابه حالت بالا، یعنی صورت مبهم 1^∞، است.

(۵) روش صورت مبهم ∞^0: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و هدف یافتن $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ باشد، که به آن **صورت مبهم** ∞^0 می‌گویند.

روش محاسبه مشابه حالت 1^∞ است.

مثال ۳۳ : حدود زیر را محاسبه نمایید :

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot g\, x} \qquad (iii)\ \lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg(\frac{\pi x}{2a})}$$

$$(iv)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \qquad (v)\ \lim_{x\to 0}(arc\sin x)^{tg\, x}.$$

حل. (i) این، صورت مبهم 0^0 است. قرار می‌دهیم $y=x^x$ و از طرفین این تساوی لگاریتم می‌گیریم :

$$\ln y=\ln x^x=x\ln x$$

و بدست می‌آوریم :

$$\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}(\ln x^x) = \lim_{x\to 0^+}(x\ln x);$$

امّا $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$.

در نتیجه $\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = 0$ که از آنجا $\lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$، یا $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

(ii) چون $\lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$ و $\lim_{x\to 0^+}\cot g\, x = +\infty$، صورت مبهم 1^∞ را داریم.

فرض کنیم $y = (x+1)^{\cot g\, x}$. در این صورت

$$\ln y = \cot g\, x \ln(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{tg\, x}.$$

بنابراین $\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{tg\, x}$.

چون $\lim_{x\to 0^+}\ln(x+1) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} tg\, x = 0$ می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{tg\, x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x} = 1.$$

بنابراین خواهیم داشت $\lim_{x\to 0^+}\ln y = 1$ و لذا $\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = 1$، یعنی، $\lim_{x\to 0^+} y = e^1 = 1$. بنابراین $\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot g\, x} = 1$.

(iii) چون $\lim_{x\to a}(2-\frac{x}{a}) = 1$ و $\lim_{x\to a} tg\,(\frac{\pi x}{2a}) = \infty$ حالت مبهم 1^∞ را داریم. قرار می‌دهیم $y = (2-\frac{x}{a})^{tg(\frac{\pi x}{2a})}$ و از طرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم :

$$\ln y = \ln(2-\frac{x}{a})^{tg(\frac{\pi x}{2a})} = tg\,(\frac{\pi x}{2a})\ln(2-\frac{x}{a}).$$

پس $\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a} tg\,(\frac{\pi x}{2a})\ln(2-\frac{x}{a})$ و حالت مبهم $0\cdot\infty$ بدست می‌آید. اکنون

$$\ln(\lim_{x\to a} y) = \lim_{x\to a}(\ln y) = \lim_{x\to a} tg\,(\frac{\pi x}{2a})\ln(2-\frac{x}{a})$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\ln(2-\frac{x}{a})}{\cot g\,(\frac{\pi x}{2a})}=\lim_{x\to a}\frac{\ln(2a-x)-\ln a}{\cot g\,(\frac{\pi x}{2a})}$$ (صورت مبهم $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-1}{2a-x}}{-(1+\cot g^2(\frac{\pi x}{2a}))\frac{\pi}{2a}}=\frac{\frac{-1}{a}}{\frac{-\pi}{2a}}=\frac{2}{\pi}.$$

بنابراین $\ln(\lim_{x\to a} y)=\frac{2}{\pi}$ و لذا $\lim_{x\to a} y=e^{\frac{2}{\pi}}$ $=\lim_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{tg(\frac{\pi x}{2a})}$.

(iv) صورت مبهم ∞^0 را داریم. فرض کنیم $y=(\frac{1}{x})^{\sin x}$. در این صورت $\ln y=\sin x\ln(\frac{1}{x})$ و

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln(\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{\sin x}}$$ (صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=1\times 0=0.$$

بنابر این

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+} y=e^0=1$$

(v) چون $\lim_{x\to 0}(arc\sin x)=0$ و $\lim_{x\to 0} tgx=0$ پس صورت مبهم 0^0 را داریم. قرار می دهیم $y=(arc\sin x)^{tg\,x}$. پس

$$\ln y=tgx\ln(arc\sin x).$$

اما (صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$)
$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0} tgx\ln(arc\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(arc\sin x)}{cotg x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{arc\sin x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+arc\sin x\times\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x}{1 - arc\sin x \times \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

بنابراین $\lim_{x\to 0} \ln y = \ln(\lim_{x\to 0} y) = 0$ که از آنجا $\lim_{x\to 0}(arc\sin x)^{tgx} = \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

۴ . ۶ دیفرانسیل

فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ $y = f(x)$ تعریف شده ودر نقطهٔ x مشتق پذیرباشد، یعنی

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

موجود باشد، که در آن $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. از (1) نتیجه می شود که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد می‌مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

اگر $0 < |\Delta x| < \delta$ آنگاه $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right| < \varepsilon$

که معادل است با

اگر $0 < |\Delta x| < \delta$ آنگاه $\frac{|\Delta y - f'(x)\Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon$

معنی عبارت بالا این است که $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ در مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است (توجه کنید که $|\Delta y - f'(x)\Delta x| < \varepsilon|\Delta x|$ و ما می توانیم عدد مثبت ε را هر قدر که بخواهیم کوچک اختیار کنیم). به عبارت دیگر، برای $|\Delta x|$ بقدرکافی کوچک، $f'(x)\Delta x$ تقریب خوبی برای Δy است. با بکار بردن نماد $\approx$، به معنی «تقریباً مساوی با» ، می‌گوییم

اگر $|\Delta x|$ بقدر کافی کوچک باشد، آنگاه $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

تعریف : اگر تابع f با $y=f(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه **دیفرانسیل** y، که با $dy=df$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$dy=f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

که در آن x در حوزهٔ تعریف f' است و Δx نموی دلخواه از متغیر x می‌باشد.

به طوری که از تعریف بالا ملاحظه می‌شود مفهوم دیفرانسیل به دو متغیر بستگی دارد، یکی متغیر x که می‌تواند هر عددی در حوزهٔ تعریف f' باشد، و دیگری Δx که می تواند هر عدد دلخواهی اختیار گردد. به عنوان توضیح اگر $y=4x^2-x$، آنگاه $f(x)=4x^2-x$ و لذا $f'(x)=8x-1$. بنابراین $dy=(8x-1)\Delta x$. اگر، مثلاً، $x=2$ آنگاه $dy=15\Delta x$.

وقتی $y=f(x)$، تعریف بالا مشخص می‌کند که منظور از dy، دیفرانسیل متغیر وابسته، چیست. ما می‌خواهیم دیفرانسیل متغیر مستقل x، یعنی dx ، را نیز تعریف نماییم. برای این منظور تابع همانی $f(x)=x$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت $f'(x)=1$ و $y=x$ ، بنابراین $dy=1.\Delta x=\Delta x$. چون $y=x$، برای این تابع خاص dx بایستی مساوی با dy باشد. این دلیلی است که ما را به تعریف زیر رهنمون می‌سازد.

تعریف : اگر تابع f با $y=f(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه دیفرانسیل متغیرمستقل x، که با dx نشان داده می‌شود، بصورت زیر تعریف می‌گردد :

$$dx=\Delta x$$

که در آن Δx نموی دلخواه از x بوده، و x عددی در حوزهٔ تعریف f' می باشد.

از تساوی های بالا بدست می‌آوریم

$$dy=f'(x)\,dx \quad . \qquad (3)$$

با تقسیم طرفین تساوی بالابر dx داریم :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \qquad (4)$$ (هرگاه $dx\neq 0$) .

بنابراین مشتق $f'(x)$ را می‌توان به عنوان خارج قسمت دیفرانسیل تابع به دیفرانسیل متغیر مستقل درنظر گرفت. گفتیم که وقتی $|\Delta x|$ بقدر کافی کوچک باشد $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$. بنابراین، با توجه به آنچه در بالا دیدیم

$$\Delta y\approx dy \qquad (5)$$

یا، در شکل باز شدهٔ آن

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,dx \qquad (6)$$

یا

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,dx\ . \qquad (7)$$

از فرمول های بالا در محاسبات تقریبی استفاده می‌کنند.

مثال ۳۴ : (i)فرض کنیم $y = 4x^2 - 3x + 1$. مطلوبست محاسبهٔ Δy، dy و $\Delta y - dy$ برای (a) هر x و هر Δx، (b) $x = 2$ و $\Delta x = 0.1$؛ (c) $x = 2$ و $\Delta x = 0.01$ (d) $x = 2$، $\Delta x = 0.001$.

(ii) فرض کنیم $y = x^2$. مطلوب است محاسبه Δyو dy برای (a) هر x و هر Δx، (b) $x = 20$و $\Delta x = 0.1$.

حل. (i) چون $f(x) = y = 4x^2 - 3x + 1$، داریم

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (4(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1) - (4x^2 - 3x + 1).$$

که پس از ساده کردن بدست می‌آوریم $\Delta y = (8x-3)\Delta x + 4(\Delta x)^2$.

همچنین $dy = f'(x)dx$. بنابراین $dy = (8x-3)\Delta x = (8x-3)\Delta x$ و $\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2$ و این حل قسمت (a) را کامل می‌کند. برای نتایج قسمت‌های (b)، (c) و (d) به جدول زیر مراجعه نمایید :

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	0.1	1.34	1.3	0.04
2	0.01	0.1304	0.13	0.0004
2	0.001	0.013004	0.013	0.000004

(ii)بدیهی است که $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ و $dy = (x^2)'\Delta x = 2x\,\Delta x$ این حل (a) است و امّا برای (b) وقتی $x = 20$ و $\Delta x = 0.1$ داریم

$$\Delta y = 2(20)(0.1) + (0.1)^2 = 4.01$$

و

$$dy = 2(20)(0.1) = 4.00$$

و دیده می‌شود که $\Delta y - dy = 0.01$، یعنی اگر بجای Δy مقدار dy را جایگذاری کنیم مقدار خطا 0.01 خواهدبود. به شکل زیر توجه نمایید. (که در حقیقت مقدار خطا مساحت مربع سمت راست دربالا است).

شکل۴ . ۳۶

مثال ۳۵ : مقدار تقریبی $\sin 46^\circ$ را بدست آورید.

حل. اگر $y=\sin x$ ، آنگاه

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$
$$dy = (\sin x)' \Delta x = \cos x \, \Delta x$$

و بنابراین، تقریبِ $\Delta y \approx dy$ شکل

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \, \Delta x$$

را بخود می‌گیرد. با انتخاب $x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ و $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$، داریم

$$\sin 46^\circ = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 46^\circ \approx \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{180} \approx 0.7071 + (0.7071)(0.01745) \approx 0.71940 .$$

اگر به جداول مثلثاتی مراجعه شود مشاهده می‌کنیم که تا چهار رقم اعشار $\sin 46^\circ = 0.7193$.

نکته : اگر در مثال بالا قرار دهیم $x=0$ و $\Delta x = \alpha$ تقریب زیر را بدست می‌آوریم :

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

مثال ۳۶ : اگر $f(x) = tg\, x$، آنگاه بنابر (7) ، $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. داریم

$$tg(x+\Delta x) \approx tgx + \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x .$$

اگر قرار دهیم $x=0$ و $\Delta x = \alpha$ بدست می‌آوریم، $tg\alpha \approx \alpha$ و توجه کنید که α مقدار کوچکی اختیار شده است (در غیر این صورت، به عنوان مثال، اگر $\alpha \to \frac{\pi}{2}^-$ آنگاه $tg\alpha \to +\infty$).

مثال ۳۷ : اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ آنگاه بنابر (7)

$$\frac{1}{x+\Delta x} \approx \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2} \quad و \quad \sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

وبا قرار دادن $x=1$ و $\Delta x=\alpha$ به ترتیب بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha \quad \text{و} \quad \sqrt{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{2}\alpha$$

تعبیر هندسی دیفرانسیل

فرض کنیم تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق پذیر بوده و نمودار آن $y=f(x)$ را رسم کرده باشیم. فرض کنیم P نقطه $(x_0,f(x_0))$ و Q نقطهٔ $(x_0+\Delta x,f(x_0)+\Delta y)$ باشند. مماس T بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ P را رسم کرده و فرض می‌کنیم α شیب خط T باشد ($\alpha\neq 90$ زیرا $tg\alpha=f'(x_0)$ موجود است). معادلهٔ خط T (مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ P) به صورت $(x-x_0)$ $y=f(x_0)+f'(x_0)$ می‌باشد. مثلث PAB را که از خط T، خط گذرنده از P موازی با محور X ها و خط گذرنده از Q موازی با محور Y ها تشکیل شده است، درنظر می‌گیریم. در این صورت $|AB|=|PA|tg\,\alpha$ و بنابراین $|AB|=f'(x_0)\Delta x$ به دلیل آن که $|PA|=\Delta x$ و $tg\alpha=f'(x_0)$.

امّا بنا بر تعریف $dy=f'(x_0)\Delta x$، و لذا $dy=|AB|$.

از طرف دیگر، بدیهی است که نمو Δy به صورت $\Delta y=|AQ|$ می‌باشد.

به عبارت دیگر، dy نمو عرض مماس T به نمودار $f(x)$ است،در حالی که Δy نمو عرض نمودار خودِ $f(x)$ می‌باشد. در زیر، شکل (الف) داریم $dy<\Delta y$. البته ممکن است منحنی چنان باشد که $dy>\Delta y$، و این مطلب در زیر، شکل (ب) نشان داده شده است.

شکل ۴ . ۳۷

دیفرانسیل های مراتب بالاتر

فرض کنیم تابعی مانند f با ضابطهٔ $y=f(x)$ تعریف شده باشد، که در آن x متغیر مستقل است. دیفرانسیل این تابع، $dy=f'(x)dx$ به هر حال تابعی از x است، اما فقط اولین عامل، $f'(x)$، می‌تواند بستگی به x داشته باشد، عامل دوم، dx، نموی از متغیر مستقل x است. چون dy تابعی از x است، ما این حق را داریم که از دیفرانسیل این تابع صحبت کنیم.

دیفرانسیل دیفرانسیل یک تابع را **دیفرانسیل دوم** یا **دیفرانسیل مرتبهٔ دوم** آن تابع نامیده و با نماد d^2y نشان می‌دهیم :

$$d^2y=d(dy)\,.$$

حال مقدار دیفرانسیل دوم را پیدا می کنیم. بنابر تعریف کلی دیفرانسیل یک تابع داریم

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx$$

یا

$$d^2y=(f''(x)dx+f'(x)(dx)')dx$$

چون dx مستقل از x است مشتق آن نسبت به x صفر بوده و بنابراین

$$d^2y=f''(x)(dx)^2$$

معمولاً رسم است که بجای $(dx)^2$ از علامت dx^2 استفاده می‌کنند که در حقیقت به معنای مربع عبارت dx است. پس $d^2y=f''(x)dx^2$. از اینجا بدست می‌آوریم $f''(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$. (البته قبلاً دیدیم که $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ و $\dfrac{dy}{dx}$ نماد دیگری است که برای مشتق اول تابع f بکار می‌رود، حال مشتق دوم تابع f، یعنی، $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})$ را، همانطورکه در بالا مشاهده شد با $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ نشان می‌دهیم).

دیفرانسیل سوم یا **دیفرانسیل مرتبه سوّم** یک تابع، دیفرانسیل دیفرانسیل دوّم آن است:

$$d^3y=d(d^2y)=(f''(x)dx^2)dx=f'''(x)(dx)^3$$
$$=f'''(x)dx^3$$

که البته بجای $(dx)^3$ از نماد dx^3 استفاده نموده‌ایم.

به طور کلی **دیفرانسیل مرتبهٔ n ام**، دیفرانسیل مرتبهٔ اولِ دیفرانسیل مرتبهٔ $(n-1)$ام است :

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1})'dx$$

یا

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n\,.$$

اکنون با استفاده از دیفرانسیل‌های مراتب مختلف می‌توانیم مشتقات مراتب مختلف را به عنوان خارج قسمت دیفرانسیل‌های با مراتب متناسب نمایش دهیم :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}\ ,\ \ f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

نکتهٔ مهم : فرض کنیم f و g توابعی مشتق‌پذیر در نقطهٔ x بوده و c عددی ثابت باشد. چون مفاهیم دیفرانسیل و مشتق ارتباطی نزدیک با هم دارند نتایج زیر، که مشابه آن‌ها را برای مشتق بیان و ثابت نموده‌ایم، قابل بیان و اثبات هستند :

(۱) $d(c)=0$، که در آن c عددی ثابت است

(۲) $d(x^n)=nx^{n-1}dx$

(۳) $d(f+g)=df+dg$

(۴) $d(cf)=cdf$

(۵) $d(fg)=gdf+fdg$

(۶) $d(\frac{f}{g})=\frac{gdf-fdg}{g^2}\quad (g(x)\neq 0)$

(۷) $d(f^n)=nf^{n-1}df$.

اثبات. (۱) داریم $d(c)=c'.dx=0.dx=0$.

(۲) $d(x^n)=(x^n)'dx=nx^{n-1}dx$.

(۳) $d(f+g)=(f+g)'dx=(f'+g')dx=f'dx+g'dx=df+dg$.

(۴) $d(cf)=(cf)'dx=(cf')dx=c(f'dx)=cdf$.

(۵) $d(fg)=(fg)'dx=(f'g+fg')dx=g(f'dx)+f(g'dx)=gdf+fdg$.

(۶)
$$d(\frac{f}{g})=(\frac{f}{g})'dx=\frac{f'g-g'f}{g^2}dx=\frac{g(f'dx)-f(g'dx)}{g^2}=\frac{gdf-fdg}{g^2}\ .$$

(۷) $d(f^n)=(f^n)'dx=(nf^{n-1}\times f')dx=nf^{n-1}(f'dx)=nf^{n-1}df$.

(توجه کنید که $df=f'dx$)

تبصره : فرض کنیم در تابع $y=F(u)$ متغیر u مستقل باشد. در این صورت $dy=F'(u)du$.
حال اگر u تابعی از متغیر x به صورت $u=\varphi(x)$ باشد، آنگاه $y=F(\varphi(x)=g(x)$، به عبارت دیگر با مفهوم تابع مرکب سروکار داریم. امّا می‌دانیم که $y'_x=y'_u\times u'_x$ و اگر y را به عنوان تابعی از x در نظر بگیریم، $dy=y'_udu$ و لذا $dy=(y'_u\times u'_y)dx$ یا $dy=y'_u(u'_xdu)$. امّا

$du = u'_x\,dx = \varphi'(x)dx$، پس $dy = y'_x dx$ یا $dy = F'(u)\ du$. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که برای دیفرانسیل مرتبه اوّل تابع $y = F(u)$ تفاوتی نمی‌کند که متغیر u مستقل بوده یا این که خود تابعی از متغیری دیگر مانند x باشد. البته بایستی توجه داشت که این مطلب تنها برای دیفرانسیل مرتبه اول یک تابع صحیح است و برای دیفرانسیل‌های مراتب بالاتر یک تابع وضعیت و نتیجهٔ کار بکلی متفاوت خواهدبود.

مثال ۳۸ : اگر زمین را کرهٔ کامل فرض کنیم و شعاع آن را 6200 کیلومتر بگیریم، چنانچه 10 کیلومتر به شعاع کرهٔ زمین افزوده شود با استفاده از دیفرانسیل افزایش تقریبی سطح کرهٔ زمین را محاسبه کنید.

حل . می‌دانیم که اگر کره ای به شعاع R باشد سطح کره از رابطهٔ $S = 4\pi R^2$ بدست می‌آید. پس فرض کنیم $S = f(R) = 4\pi R^2$ و لذا $S' = f(R) = 8\pi R$. اکنون قرار می‌دهیم $R = 6200$ و $\Delta R = 10$ و از تقریب $\Delta s \approx ds$ استفاده می‌کنیم:

$$ds = f'(R)\Delta R = 8\pi R\,\Delta R\,.$$

لذا $ds = 8\pi \times 6200 \times 10 = 496000\pi$. بنابراین

(کیلومترمربع) $\Delta s \approx ds = 496000\pi$ و این افزایش تقریبی سطح کرهٔ زمین است .

مثال ۳۹ : (i)درستی تساوی های زیر را به کمک دیفرانسیل ثابت کنید :

(الف) $d\left(\dfrac{x}{1+x^2} + arctgx\right) = \dfrac{2dx}{(1+x^2)^2}$

(ب) $d\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}\right) = \dfrac{x-2}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx$

(ii)اگر $y = arctg\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$، آنگاه dy را تعیین کرده و به ساده ترین صورت بنویسید.

(iii)دیفرانسیل، توابع زیر را پیدا کنید :

(الف) $y = f(x) = (arc\cos\sqrt{x})^3$ (ب) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

حل : (i) قسمت (الف) داریم

$$d\left(\frac{x}{1+x^2} + arctgx\right) = d\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + d(arctgx)$$

$$=(\frac{x}{1+x^2})'dx+(arctgx)'dx=\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}dx+\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1+x^2-2x^2+1+x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2dx}{(1+x^2)^2}.$$

قسمت (ب)، داریم

$$d(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1})=(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1})'dx$$
$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(2x+1)-2\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2}dx=\frac{\frac{x(2x+1)-2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{(2x+1)^2}dx$$
$$=\frac{x-2}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx.$$

(ii) داریم $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{tgx+1}{tgx-1}=-\frac{1+tgx}{1-tgx}$. امّا از بحث توابع مثلثاتی می‌دانیم که $tg(u+t)=\frac{tgu+tgt}{1-tgu.tgt}$، بنابراین $-\frac{1+tgx}{1-tgx}=-tg(\frac{\pi}{4}+x)$ ودر نتیجه

$$y=arctg(-tg(\frac{\pi}{4}+x)=-arctg(tg(\frac{\pi}{4}+x))$$
$$=-(\frac{\pi}{4}+x+k\pi)\ ,\ k\in Z.$$

پس

$$.dy=y'dx=(-1)dx=-dx\ .$$

(iii)قسمت (الف). داریم

$$dy=y'dx=3(arc\cos\sqrt{x})^2\times\frac{-(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}dx$$
$$=3(arc\cos\sqrt{x})^2\times\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}dx=\frac{-3(arc\cos\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}}dx.$$

قسمت (ب). داریم

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin x}{1-\sin x})=\frac{1}{2}(\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x))$$

لذا

$$y'=\frac{1}{2}(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x})=\frac{1}{2}(\frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin^2 x)})$$
$$=\frac{1}{2}\frac{2\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\Rightarrow dy=y'dx=\frac{dx}{\cos x}.$$

۴ . ۷ فرمول تیلور

فرض کنیم تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ دارای مشتقات متوالی تا مرتبـهٔ $(n+1)$ ام در یـک بـازهٔ بـاز شامل نقطهٔ $x=a$ باشد. می‌خواهیم یک چند جمله‌ای مانند $y=P_n(x)$ با درجهٔ حداکثر n پیدا کنیم که مقدار آن در $x=a$ مساوی با مقدار تابع $f(x)$ در ایـن نقطـه بـوده، و مقـادیر مشـتقات متوالی آن تا مرتبهٔ n ام در $x=a$ مساوی با مقادیر مشتقات متناظر تابع $f(x)$ در این نقطه باشد :

$$P_n(a)=f(a), P_n'(a)=f'(a), P_n''(a)=f''(a),.., P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a) \quad (1)$$

طبیعی است که انتظار داشته باشیم، به معنای مشخصی، یک چنین چند جمله ای «نزدیک» به تابع $f(x)$ باشد.

فرض کنیم در جستجوی این چند جمله ای به شکلی باشیم که نسبت به قوای $(x-a)$ با ضـرایب نامعین مرتب شده است:

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+...+C_n(x-a)^n \quad (2)$$

ما ضرایب نامعین $C_n,...,C_1,C_0$ را چنان تعیین می‌کنیم که شرایط (1) برقرار باشد.

ابتدا مشتقات $P_n(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}
P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+...+nC_n(x-a)^{n-1} \\
P''(x)=2.1C_2+3.2C_3(x-a)+...n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_n^{(n)}(x)= \qquad\qquad\qquad\qquad n(n-1)....2.1C_n
\end{array}\right\} \quad (3)$$

با قرار دادن، در طرفهای چپ و راست (2)و (3)، مقدار a را بجای x ، با اسـتفاده از (1)، $P_n(a)$ مساوی با $P_n'(a)=f'(a), f(a)$ و الی آخررا ، بدست می‌آوریم

$$\begin{array}{l}
f(a)=C_0 \\
f'(a)=C_1 \\
f''(a)=2.1C_2 \\
f'''(a)=3.2.1C_3 \\
\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)....2.1C_n
\end{array}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = f(a), C_1 = f'(a),\ C_2 = \dfrac{1}{1.2} f''(a) \\ C_3 = \dfrac{1}{1.2.3} f'''(a), \ldots, C_n = \dfrac{1}{1.2.\ldots.n} f^{(n)}(a) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

با جایگذاری مقادیر $C_n, \ldots, C_2, C_1, C_0$ در (2) چند جمله‌ای موردنظر را بدست می‌آوریم :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1.2.\ldots.n} f^{(n)}(a) \quad (5)$$

اگر تفاضل بین مقادیر تابع مفروض $f(x)$ و چند جمله‌ای ساخته شدهٔ $P_n(x)$ را بـا نمـاد $R_n(x)$ نشان دهیم داریم :

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ که از آنجا $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$،یا در شکل باز شدهٔ آن،

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \qquad (6)$$

$R_n(x)$ باقیمانده نامیده می‌شود. به ازای مقادیری از x، که برای آن ها باقیماندهٔ $R_n(x)$ کوچـک باشد، چند جمله‌ای $P_n(x)$ نمایشی تقریبی از تابع $f(x)$ بدست می‌دهد. بنابراین رابطهٔ (6) مـا را قادر می‌سازد که تابع $y = f(x)$ را بوسیلهٔ چند جمله‌ای $y = P_n(x)$ ، با درجهٔ مناسبی از دقت که مساوی با مقدار باقیمانده $R_n(x)$ است، جایگذاری نمائیم.

مسأله بعدی ما محاسبه کمیت $R_n(x)$ به ازای مقادیر مختلف x است. فرض کنیم باقیمانده را بـه شکل

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x) \qquad (7)$$

نوشته باشیم که در آن $Q(x)$ تابع مشخصی است که بایستی تعریف گردد، و بنابراین (6) را دوباره می‌نویسیم :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)} Q(x) \qquad (6')$$

برای مقادیر ثابت xو a، تابع $Q(x)$ دارای مقدار معینی است که با Q نمایش می‌دهیم.

به علاوه تابع کمکی زیر از متغیر t را (که t بین x و a است) درنظر می‌گیریم :

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-...-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q$$

که در آن Q دارای مقدار معینی است که با رابطهٔ $(6')$ تعریف شده است، در اینجا ما a و x را به عنوان اعداد معینی درنظر می گیریم. مشتق $F'(t)$ را پیدا می کنیم :

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)$$
$$-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+...-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)$$
$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q$$

یا، پس از حذف،

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q \qquad (8)$$

بنابراین تابع $F(t)$برای تمامی نقاط t نزدیک به نقطهٔ به طول a ($a\le t\le x$ وقتی که $a<x$ و $a\ge t\ge x$ وقتی که $a>x$) دارای مشتق است.

علاوه برآن، با استفاده از $(6')$ ، توجه می‌کنیم که $F(a)=0$ و $F(x)=0$. بنابراین، تابع $F(t)$ در شرایط قضیهٔ رَول صدق می کند و در نتیجه، مقداری مانند $t=\xi$ بین a و x وجود دارد به طوری که $F'(\xi)=0$. که از آنجا، با استفاده از (8) ، بدست می‌آوریم

$$-\frac{(x-\xi)^{nQ}}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}=0$$

و بنابراین $Q=f^{(n+1)}(\xi)$. با قراردادن این عبارت در (7)، بدست می‌آوریم

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

این را **شکل لاگرانژ** باقیمانده می نامند. چون ξ بین x و a قرار دارد، می‌توان آن را به شکل $\xi=a+\theta(x-a)$ نمایش داد که در آن θ عددی بین 0و1 است یعنی، $0<\theta<1$، در این صورت فرمول باقیمانده به شکل زیر درمی‌آید :

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right].$$

فرمول

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...$$
$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right] \qquad (9)$$

فرمول تیلور برای تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ نامیده می شود.

اگر در فرمول تیلور $a=0$ قرار دهیم بدست خواهیم آورد :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad (10)$$

که در آن $0<\theta<1$. این حالت خاص فرمول تیلور گاهی **فرمول مکلورن** نامیده می‌شود

مثال ۴۰ : چند جمله‌ای $P(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ را با استفاده از فرمول تیلور برحسب قوای $(x-1)$ بسط دهید.

حل . برای حل مساله لازم است که مقدار چند جمله‌ای و مشتقات آن را در نقطهٔ $x=1$ پیدا کنیم. محاسبات مربوطه در زیر داده شده اند : به ازای $x=1$ داریم

$$P(1)=0 \ , \ P'(1)=0 \ , \ P''(1)=0 \ , \ P'''(1)=18$$
$$P^{(4)}(1)=72 \ , \ P^{(5)}(1)=120 \ , \ P^{(n)}(x)=0 \ \ (n\ge 6)$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده در فرمول تیلور بدست می‌آوریم

$$P(x)=\frac{18}{3!}(x-1)^3+\frac{72}{4!}(x-1)^4+\frac{120}{5!}(x-1)^5,$$

یا

$$P(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5.$$

مثال ۴۱ : فرمول تیلور $f(x)=\ln x$ را در $x=1$ پیدا کنید.

حل . در شکل خلاصه شده فرمول تیلور به صورت $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ است. برای P_n ما به n مشتق اول f ، و برای R_n به $f^{(n+1)}$ نیاز داریم. بنابراین مشتقات متوالی را محاسبه می‌نماییم :

$$\begin{array}{ll}
f(x)=\ln x & f(1)=0 \\
f'(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1} & f'(1)=1 \\
f''(x)=-x^{-2} & f''(1)=-1 \\
f'''(x)=2x^{-3} & f'''(1)=2 \\
f^{(4)}(x)=-3!x^{-4} & f^{(4)}(1)=-3! \\
f^{(5)}(x)=4!x^{-5} & f^{(5)}(1)=4! \\
\vdots & \\
f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} & f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)! \\
\hline
f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n}n!x^{-(n+1)} & f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^{n}n!\xi^{-(n+1)}.
\end{array}$$

اکنون می‌توانیم $P_n(x)$ و $R_n(x)$ را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x)+R_n(x) \\ &= f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \\ &= 0+1(x-1)+\frac{-1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{-3!}{4!}(x-1)+\ldots \\ &+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots \\ &+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)\xi^{n+1}} \end{aligned}$$

که در آن ξ بین 1 و x قرار دارد.

مثال ۴۲: (۱) بسط تابع $f(x)=e^x$ به فرمول مکلورن را پیدا کنید.

(۲) چند جمله در بسط مکلورن برای تابع $f(x)=e^x$ بایستی اختیار شود تا این که چند جمله‌ای نمایش این تابع در بازهٔ $[-1,1]$ تا سه رقم اعشار دقت داشته باشد.

حل. (۱) با یافتن مشتقات متوالی $f(x)$ داریم :

$$\begin{array}{lll} f(x)=e^x & , & f(0)=1 \\ f'(x)=e^x & , & f'(0)=1 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ f^{(n)}(x)=e^x & , & f^{(n)}(0)=1 \end{array}$$

با جایگذاری عبارت‌های بدست آمده در فرمول (10) خواهیم داشت

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \;,0<\theta<1\,.$$

(۲) داریم $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$. چون، بنابر فرض، $|x|\le 1$, $0<\theta<1$، پس

$$|R_n(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}<\frac{1}{(n+1)!}e<\frac{3}{(n+1)!}\,.$$

بنابراین اگر نامساوی $\frac{1}{1000} \le \frac{3}{(n+1)!}$ برقرار باشد آنگاه نامساوی $|R_n(x)| \le \frac{1}{1000}$ نیز برقرار خواهدبود. برای این کار کافی است $n \ge 6$ اختیار شود $(7! = 5040)$ بنابراین 6 جمله در فرمول مکلورن کافی خواهدبود.

مثال ۴۳ : با استفاده از فرمول مکلورن تابع $f(x) = \ln(1+x)$ را بسط دهید. در بازهٔ $[0,1]$ اگر تا جمله x^9 را درنظر بگیریم خطای حاصل از حذف باقیمانده را تخمین بزنید.

حل. داریم $f(0) = \ln 1 = 0$. مشتق n ام تابع مفروض برابر است با

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} . \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \ \ (n = 1,2,3,...).$$

با جایگذاری مشتقات در فرمول مکلورن بدست می‌آوریم

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

که در آن $R_n(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} . \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. حال اگر تا جملهٔ x^9 را درنظر بگیریم داریم

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{x^9}{9} + R_{10}(x)$$

که در آن

$$R_{10}(x) = \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!} x^{10} = -\frac{9!}{10!(1+\xi)^{10}} x^{10} = -\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}} . \qquad (0 < \xi < x)$$

اکنون با درنظر گرفتن این که $0 \le x \le 1$, $\xi > 0$ قدر مطلق باقیمانده را تخمین زده و داریم

$$|R_{10}(x)| = \left| \frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}} \right| < \frac{1}{10}.$$

مثال ۴۴: (۱) بسط توابع $\sin x$ و $\cos x$ به فرمول مکلورن را بنوسید.

(۲) مقدار تقریبی $\cos 5^\circ$ را محاسبه نمایید.

(۳) بـه ازای چـه مقـادیری از x فرمـول تقریبـی $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ دارای خطـائی کمتـر از 0.00005 است؟

حل. (۱) مشتقات متوالی $f(x) = \sin x$ را پیدا می‌کنیم :

$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}) \qquad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x=\sin(x+\frac{2\pi}{2}) \qquad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2}) \qquad f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x=\sin(x+4\frac{\pi}{2}) \qquad f^{(4)}(1)=0$

....

$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2}) \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$

$f^{(n+1)}(x)=\sin(x+(n+1)\frac{\pi}{2}) \qquad f^{(n+1)}(\xi)=\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right].$

با جایگذاری در (10) بسط تابع $f(x)=\sin x$ به فرمول مکلورن را بدست می‌آوریم :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{x^n}{n!}\sin(n\frac{\pi}{2})+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

در مرحلهٔ بعد با یافتن مشتقات متوالی تابع $f(x)=\cos x$ و جایگذاری آنها در فرمول مکلورن بسط زیر را بدست می‌آوریم :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{x^n}{n!}\cos(\frac{n\pi}{2})+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

(۲) در فرمول مکلورن

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}(x)\,.$$

قرار می‌دهیم $x=\frac{\pi}{36}$، چون

$$\frac{x^2}{2!}=\frac{\pi^2}{2.36^2}=0.003808\ ,\ \frac{x^4}{4!}=\frac{1}{6}(\frac{x^2}{2})^2=2.4\times10^{-6}.$$

ما بسط را محدود به جملات زیر می‌نمائیم :

$$\cos x\approx1-\frac{x^2}{2!},$$

تقریب خطا عبارت است از

$$|R_4(x)| = \left|\frac{\cos x}{4!}x^4\right| \le \frac{|x|^4}{4!} < 2.5\times 10^{-6}$$

و بنابراین، با دقت خواسته شده،

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - 0.00381 = 0.99619.$$

(۳) طرف راست معادلهٔ تقریبی نمایش دهندهٔ اولین شش جملهٔ بسط مکلورن برای تابع $\cos x$است. تقریبی برای $R_6(x)$ بدست می‌دهیم. چون $(\cos x)^{(6)} = -\cos x$، پس

$$|R_6(x)| = \left|\frac{-\cos x}{6!}x^6\right| \le \frac{|x|^6}{6!}.$$

برای آن که خطا کمتر از 0.00005 باشد، مقادیر x را چنان اختیار می‌کنیم که در نامساوی $\frac{|6|^6}{6!} \le 0.00005$ صدق کنند. با حل این نامساوی بدست می‌آوریم $|x| < 0.575$

مثال ۴۵: نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \;\; (x>0)$$

حل. برطبق فرمول مکلورن با باقیماندهٔ $R_2(x)$ داریم

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2}$$

که در آن $0 < \xi < x$. برطبق همان فرمول با باقیماندهٔ $R_3(x)$ داریم

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+\xi_1)^3}$$

که در آن $0 < \xi_1 < x$. چون برای $x > 0$ داریم $\frac{x^2}{2(1+\xi)^2} > 0$ و $\frac{x^3}{3(1+\xi_1)^3} > 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

تبصره : عبارت

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ +O(|x-a|^n)$$

فرمول تیلور با باقیمانده در شکل **پئانو** نامیده می‌شود که در آن $\xi(x)=O\left[\psi(x)\right]$ بدین معنی است که وقتی $x\to a$، تابع $\xi(x)$ بینهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر نسبت به $\psi(x)$ است، یعنی، $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$. به ویژه در $x=a$ داریم

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+O(|x|^n).$$

شکل پئانواز باقیمانده برای فرمول تیلورنشان می‌دهد که وقتی چند جمله‌ای تیلور درجه n را برای $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ a قرار می‌دهیم در حقیقت خطائی را معرفی می‌نمائیم که بینهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر نسبت به $(x-a)^n$ است وقتی $x\to a$.

بسط‌های زیر دارای بیشترین اهمیت در حل مسائل عملی می‌باشند :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+O(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+O(x^{2n});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+O(x^{2n-1});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+O(x^n).$$

مثال ۴۶ : بسط تابع $f(x)=\sin^2 x-x^2e^{-x}$ را در قوای مثبت x تا جملاتی که دارای بینهایت کوچکی از مرتبهٔ چهارم نسبت به x هستند بنوسید.

حل. داریم

$$f(x)=\left[x-\frac{x^3}{6}+O(x^4)\right]^2-x^2\left[1-x+\frac{x^2}{2}+O(x^2)\right]=$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+O(x^5)-x^2+x^3-\frac{x^4}{2}+O(x^4)=x^3-\frac{5}{6}x^4+O(x^4).$$

مثال ۴۷ : با استفاده از فرمول تیلور با باقیمانده در شکل پئانو حدود زیررا محاسبه نمائید :

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{tg^4 x}$.

حل. (۱)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+O(x^4)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3!}+O(x)\right]=-\frac{1}{3!}.$$

(۲) داریم

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^5)$$
$$\sin x = x+O(x),$$
$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+O(z^2).$$

و در نتیجه برای $z=-\frac{x^2}{2}$ بدست می‌آوریم $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O(x^4)$

و لذا

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{-x}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{x}+\frac{x^4}{8}+O(x^4)-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}{x^4+O(x^4)}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\alpha(x)}{1+\alpha(x)}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}.$$

در اینجا نماد $\alpha(x)$ برای $\dfrac{O(x^4)}{x^4}$ بکار رفته است که برای $x\to 0$ یک بینهایت کوچک است.

(۳) با نگهداشتن بینهایت کوچک های تا مرتبهٔ چهارم نسبت به x در صورت ومخرج بدست می‌آوریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{tg^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cos x}{x^4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^4+O(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+O(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{O(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{3}.$$